Pro $A \in \Lambda_d$ nazveme funkci $f : A \to \mathbb{R}$ měřitelnou, pokud má měřitelné rozšíření na $\mathbb{R}^d$. Prostor všech funkcí měřitelných na A budeme značit $\mathcal{M}(A)$.

Věta 1 (o limitě integrálu závislého na parametru). *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $p \in I$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : I \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(t,x)$, $x \in A$, je měřitelná pro všechna $t \in I \setminus \{p\}$*
- *limita $\lim\limits_{t \to p} f(p,x) =: F(x)$ existuje pro s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in \mathcal{L}(A)$, že $|f(p,x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $t \in P$.*

Potom $F \in \mathcal{L}(A)$ a platí

$$\lim_{t \to p} \int_A f(t,x)\, dx = \int_A F$$

Poznámky a příklady. *1. Věta platí i pro jednostranné limity. Předpoklady navíc stačí ověřit jen lokálně.*

2. Funkce

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$$

je spojitá na $(0, \infty)$

3. Věta má i variantu pro spojitost: Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $p \in I$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : I \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že

- *funkce $x \mapsto f(t,x)$, $x \in A$, je měřitelná pro všechna $t \in I$,*
- *funkce $t \mapsto f(t,x)$ je spojitá v p pro s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in \mathcal{L}(A)$, že $|f(t,x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $t \in I$.*

Potom je funkce $t \mapsto \displaystyle\int f(t,x)\, dx$ spojitá v bodě p.

4. Rovněž existuje i varianta využívající Leviho větu místo Lebesgueovy.

Věta 2 (o derivaci integrálu závislého na parametru). *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, $p \in I$, $A \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f : I \times A \to \mathbb{R}$. Předpokládejme navíc, že*

- *funkce $x \mapsto f(t,x)$, $x \in A$, je měřitelná pro všechna $t \in I$,*
- *existuje $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ pro všechna $t \in I$ a s.v. $x \in A$,*
- *existuje $g \in \mathcal{L}(A)$, že $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in A$ a všechna $t \in P$,*
- *existuje $p \in I$, že funkce $x \mapsto f(p,x)$, $x \in A$, leží v $\mathcal{L}(A)$.*

Potom je funkce $F : t \mapsto \displaystyle\int f(t,x)\, dx$ definována na I, má tam vlastní derivaci a pro $t \in I$ platí

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx.$$

Poznámky a příklady. *1.* $\Gamma^{(n)} = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \log^n x \, dx,$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx}-1}{xe^x}\, dx = -\log(t+1).$

Prostory L^p

Na $\mathcal{M}(A)$ definujeme relaci ekvivalence $\sim$ jako $f \sim g$, právě tehdy, když $f = g$ s.v.

Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$||f||_p^A = \left(\int_A |f|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\mathcal{L}^p(A) = \left\{ f \in \mathcal{M}(A) : ||f||_p^A < \infty \right\},$$

a

$$L^p(A) = \{\langle f \rangle : f \in \mathcal{L}^p(A)\}.$$

Platí

Věta 3 (Vlastnosti prostorů L^p). *1.* $(L^p(A), ||\cdot||_p)$ *je úplný normovaný lineární prostor,*

2. pro $p, q \in [1, \infty)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *a* $f, g \in \mathcal{M}(A)$ *platí*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

3. pro $p, q \in [1, \infty)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(A)$, $g \in \mathcal{L}^q(A)$ *platí* $fg \in \mathcal{L}^1(A)$.